

Diseño de interior: Gerardo Miño
Diseño de cubierta: Ángel Vega

Edición: Primera. Febrero de 2017

ISBN: 978-84-16467-72-3

Lugar de edición: Buenos Aires, Argentina

Colección: Educación y Didáctica

Serie: Fichas de Investigación

Director: José Vilella

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

© 2017, Miño y Dávila srl / Miño y Dávila sl

MIÑO y DÁVILA
EDITORES

Miño y Dávila srl
Tacuarí 540
(C1071AAL)
tel-fax: (54 11) 4331-1565
Buenos Aires, Argentina
produccion@minoydavila.com
info@minoydavila.com
www.minoydavila.com



UNSAM
EDITA

© 2016 UNSAM EDITA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SAN MARTÍN
Campus Miguelete. Edificio Tornavía
Martín de Irigoyen 3100, San Martín
(B1650HMK), provincia de Buenos Aires
unsamedita@unsam.edu.ar
www.unsamedita.unsam.edu.ar

Gema Fioriti
(compiladora)

**RECURSOS TECNOLÓGICOS EN LA
ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA**
Reflexiones de docentes e investigadores

Fernando Jorge Bifano
Pablo Carranza
Rosa Ana Ferragina
Ghislaine Gueudet
Alicia M. Iturbe
Leonardo José Lupinacci
María Elena Ruiz
Natalia Sgreccia
Luc Trouche
José Villella



ÍNDICE

PRESENTACIÓN por Gema Fioriti.....	7
---------------------------------------	---

— *Primera parte* —

Los alumnos, los docentes, el conocimiento matemático y las TIC

1. LA FUNCIÓN COMO MODELIZADORA DE LA VARIACIÓN. PRODUCCIONES DE ALUMNOS Y RECURSOS DOCENTES por Leonardo José Lupinacci	15
2. DOCENTES E INTEGRACIÓN DE LA TECNOLOGÍA DE LA COMUNICACIÓN Y LA INFORMACIÓN PARA LA ENSEÑANZA (TICE). EL CASO DE DOCENTES QUE, EN EL MARCO DE UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN, INCORPORARON UN <i>SOFTWARE</i> PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA EN SUS CLASES por María Elena Ruiz ~ Alicia M. Iturbe.....	41
3. ¿CÓMO EVOLUCIONAN LOS RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA? ANÁLISIS DEL CASO DE UN RECURSO PARA ENSEÑAR FUNCIONES CON GEOGEBRA, A PARTIR DE LA IDENTIFICACIÓN DE INCIDENTES DOCUMENTALES por Fernando Jorge Bifano	61
4. CARACTERIZACIÓN DE LA FUNCIÓN MEDIADA POR <i>SOFTWARE</i> DE GEOMETRÍA DINÁMICA. EL CASO DEL PUNTO DINÁMICO por Rosa Ana Ferragina ~ Leonardo José Lupinacci	69

— *Segunda parte* —

Recursos tecnológicos para la interacción docente

5. RESSOURCES EN LIGNE ET TRAVAIL COLLECTIF ENSEIGNANT: ACCOMPAGNER LES ÉVOLUTIONS DE PRATIQUES por Ghislaine Guedet ~ Luc Trouche	93
--	----

6. COMUNICACIÓN PROMOVIDA ENTRE PROFESORES DE MATEMÁTICA AL
INTERACTUAR MEDIANTE GRUPOS DE FACEBOOK
por Natalia Sgreccia ~ Pablo Carranza..... 107

— *A modo de síntesis* —

7. REVISITANDO LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA CON OJOS TIC:
OTRO DESAFÍO PARA EL DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE
por José Vilella..... 143

Presentación

por Gema Fioriti



La publicación que se presenta es una producción colectiva de investigadores en Didáctica de la Matemática de instituciones universitarias de Argentina y Francia. Es el resultado de reflexiones realizadas de manera colaborativa en el marco del proyecto REDES VIII, de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Ciencia y Tecnología de Argentina, que se inició en 2011.

Participaron del proyecto las siguientes instituciones: el Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE) de la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM), el Instituto de Investigación en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática de la Universidad Nacional de Río Negro (UNRN) y l'Ecole Normale Supérieure de Lyon de l'Institut Français de l'Éducation.

En Argentina, el programa “Conectar Igualdad”, una política del Estado nacional que propone incorporar, integrar y aprovechar desde el punto de vista pedagógico las TIC en el sistema educativo, generó expectativas y demandas en los diferentes actores del sistema educativo; y en los investigadores, la necesidad de estudiar la problemática que implica la disponibilidad por cada alumno y docente de una computadora que contiene programas de matemática.

En Francia, especialistas en Didáctica de la Matemática trabajan desde hace años en la problemática de la enseñanza de la Matemática en entornos informáticos. Ellos desarrollaron conocimientos a partir de reflexionar sobre la integración de programas informáticos en la enseñanza de la matemática; construyeron también dispositivos innovadores para la formación de docentes, basados en interacciones a través de soportes informáticos.

Entendimos entonces que podríamos producir una sinergia entre investigadores de ambos países con la finalidad de compartir experiencias avanzadas de integración de las TIC a la enseñanza de la matemática y problemáticas de investigación para contribuir a la producción de conocimiento teórico y práctico sobre la utilización de herramientas informáticas en el estudio de la matemática en la escuela secundaria.

Para el desarrollo del proyecto, se trabajó en la producción de situaciones de enseñanza de matemática en entornos informáticos; la producción

se realizó de forma colaborativa entre investigadores y profesores de las universidades involucradas.

Este tipo de trabajo pone al profesor en un lugar de productor y no solo de receptor de experiencias elaboradas por otros. Esta nueva posición del profesor como productor plantea numerosos interrogantes y desafíos para la investigación en Didáctica de la Matemática. Algunas problemáticas están siendo estudiadas por el equipo de Luc Trouche, de l'École Normale Supérieure de Lyon, en el marco del enfoque documental de lo didáctico (Gueudet y Trouche, 2008).

Paralelamente, los investigadores de las instituciones involucradas en el proyecto analizaron cómo se modifica la enseñanza de la matemática por la incorporación de las TIC; en las posibles nuevas formas que toma el conocimiento matemático, las diferentes intervenciones en la gestión de la clase por el docente y los posibles cambios en las formas de evaluar, entre otros aspectos.

La experiencia producto del proyecto EducTice, un equipo del Institut Français de l'Éducation (IFÉ), heredero del Institut National de Recherche Pédagogique, se ha construido alrededor del análisis del trabajo docente, considerándolo esencialmente como una tarea sobre los recursos. En un período de gran difusión de recursos y de comunicación rápida vía Internet, emergen nuevas preguntas imbricadas: ¿cómo asegurar la calidad de los recursos?, ¿cómo apoyar el trabajo colectivo docente?, ¿cómo articular el trabajo a distancia y el trabajo presencial? Todas estas cuestiones son esenciales tanto para la formación inicial como para la formación continua de los docentes y, en un sentido más amplio, para su desarrollo profesional. Considerar el trabajo de los docentes de matemática es una elección que conlleva sus razones: la cantidad de recursos en línea para matemática, el interés de disponer de recursos dinámicos para hacer vivir los objetos matemáticos, la proximidad de la matemática y la informática son algunos elementos que permiten anticipar un interés más fuerte de los actores en este campo. Estos resultados podrían permitir, bajo ciertas condiciones, ser traspuestos a otros dominios de conocimiento.

Hacer el seguimiento del trabajo de los profesores para construir sus recursos de su enseñanza supone pensar dispositivos sostenidos en el tiempo, pensar herramientas y modelos que permitan comunicar y concebir documentos para compartir. El equipo EducTice tiene experiencia en este tema, adquirida en los dispositivos innovadores de formación de profesores en Francia (el proyecto Pairform@nce, por ejemplo, <http://national.pairformance.education.fr/>) o en proyectos europeos tales como el InterGeo (<http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Main/About?language=es>). La colaboración con Argentina abre, para este equipo, nuevas perspectivas de enriquecimiento

metodológico en un contexto de difusión amplio y rápido de nuevas herramientas tecnológicas.

Para la realización de los intercambios entre los actores del proyecto en Argentina, sean ellos investigadores o docentes, se previó la puesta en funcionamiento de un sitio web. Este sitio sería el principal espacio de intercambio para producción y análisis de las experiencias puestas en aula por los docentes. En el proyecto participaron tres instituciones localizadas en Argentina y Francia, y los grupos de Argentina a su vez localizados en San Martín (provincia de Buenos Aires) y General Roca (provincia de Río Negro).

Habíamos previsto diferentes niveles de interacción: de los docentes entre sí; de docentes y responsables de investigación en cada equipo de trabajo, en la UNRN y en la UNSAM; entre los equipos de trabajo de la UNRN y de la UNSAM, y entre los equipos de Argentina y Francia. Como se puede ver, los grupos de trabajo que integraron el proyecto estaban localizados a grandes distancias unos de otros. Nos propusimos entonces la construcción de una plataforma o sitio para el intercambio, sin descartar otros recursos de uso habitual como Google docs, Skype, teleconferencias y correos electrónicos. También organizamos reuniones presenciales de discusión y debate al interior de cada grupo constituido y con los otros grupos.

En este sentido, pudimos concretar los encuentros presenciales en San Martín de los equipos de UNSAM y UNRN. Investigadores de estas dos universidades, a su vez, realizaron pasantías con el equipo de Luc Trouche de l'École Normale Supérieure de Lyon. Sin embargo, consideramos que la comunicación virtual fue más compleja y es un tema que nos queda pendiente de estudio.

Organización de la publicación

En los cuatro artículos que integran la primera parte, los autores indagan sobre cada uno de los tres elementos que constituyen la tríada didáctica: alumno, docente, saber en una noosfera afectada por las computadoras.

En el texto “La función como modelizadora de la variación. Producciones de alumnos y recursos docentes”, Leonardo José Lupinacci (CEDE-UNSAM) analiza cómo afecta la actividad matemática de los alumnos, el uso de herramientas tecnológicas; a la vez que analiza también cómo estas producciones se constituyen en recursos que pueden intervenir en la toma de decisiones de los docentes en sus futuras prácticas (Gueudet y Trouche; 2012), focalizando en los modos en que opera esta intervención.

Los dos artículos que siguen abordan cuestiones relativas al trabajo de los docentes que participaron del proyecto elaborando e implementando situaciones de enseñanza de matemática mediadas por TIC. La información

que se toma como base proviene de entrevistas realizadas a los docentes, que se tomaron antes y después del proceso de producción e implementación de las clases. En el primero de estos artículos, “Docentes e integración de la Tecnología de la Comunicación y la Información para la Enseñanza (TICE). El caso de docentes que, en el marco de un proyecto de investigación, incorporan un *software* para enseñar matemática en sus clases”, María Elena Ruiz y Alicia M. Iturbe (IIECNyMat-UNRN) presentan un análisis del *trabajo documental* (Gueudet y Trouche, 2010) realizado por dos profesoras del nivel medio, con dos perfiles de formación profesional diferentes. En el segundo, “¿Cómo evolucionan los recursos para la enseñanza? Análisis del caso de un recurso para enseñar funciones con GeoGebra, a partir de la identificación de incidentes documentales”, Fernando Jorge Bifano (CEDE-UNSAM) realiza un análisis de la *génesis documental* (Gueudet y Trouche, 2009 y 2010) de un recurso que estudia el comportamiento funcional mediante un proceso de modelización matemática, bajo un entorno de Geometría Dinámica (en nuestro caso particular, GeoGebra). Este artículo intenta dar cuenta de un proceso de transformación del recurso en documento a partir de la consideración de los *incidentes documentales* (Sabra, 2012) que los profesores han considerado centrales para justificar su evolución.

El último artículo de esta parte, “Caracterización de la función mediada por *software* de geometría dinámica. El caso del punto dinámico”,¹ Rosa Ana Ferragina y Leonardo José Lupinacci (CEDE-UNSAM) se proponen analizar el concepto de función en relación con el objeto “punto dinámico”, intentando responder a las siguientes cuestiones: ¿esconde el punto dinámico el concepto de función?, si esto es así, ¿cuál es este concepto?, y si la respuesta es negativa, ¿qué aportes brinda el punto dinámico para la construcción del concepto de función? Para ello, se realiza un posible recorrido por la historia del concepto función, se estudian las concepciones de función en diferentes soportes informáticos, incluidos los *software* de geometría dinámica, para terminar con el análisis del objeto “punto dinámico” elemento fuerte para el estudio de las funciones en Geogebra.

La segunda parte de esta publicación contiene dos capítulos que abordan la cuestión de los intercambios entre docente e investigadores para el seguimiento del trabajo colaborativo de producción de recursos para la enseñanza de matemática. “Ressources en ligne et travail collectif enseignant: accompagner les évolutions de pratiques”, de Guedet y Trouche, expone el enfoque teórico que sustentó el proyecto, “enfoque documental de lo didác-

1 Este texto se encuadra dentro del proyecto “Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de Matemática en Argentina y Francia”, en el que participan investigadores de la Universidad Nacional de San Martín (Argentina), la Universidad Nacional de Río Negro (Argentina) y la Ecole Normale Supérieure Lyon (Francia).

tico”, y presenta también un dispositivo desarrollado y utilizado en Francia para la formación continua: la plataforma *Pairform@nce*. Presenta también un análisis del funcionamiento de este dispositivo usando las categorías teóricas expuestas.

Facebook es una herramienta para la comunicación remota, cuya utilización se hace cada vez más frecuente en escuelas y universidades. En el capítulo “Comunicación promovida entre profesores de matemática al interactuar mediante grupos Facebook”, de Natalia Sgreccia (UNRN) y Pablo Carranza (IECNyMat-UNRN), el lector encontrará un estudio de las interacciones producidas entre docentes e investigadores en el marco de un proyecto colaborativo con localizaciones en diferentes ciudades de la provincia de Río Negro, muy aisladas entre sí y de las ciudades de residencia de los coordinadores. Se categorizan las interacciones y con los aportes de la estadística se hace un análisis de estas.

Y para finalizar, en la tercera parte, el capítulo “Revisitando la enseñanza de la geometría con ojos TIC: otro desafío para el desarrollo profesional docente” de José Vilella (CEDE-UNSAM) recupera ideas desarrolladas en diferentes marcos teóricos acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y las pone en tensión con el marco teórico del proyecto.

Esperamos que esta publicación sea un aporte más al debate iniciado hace algunos años sobre la utilización de la tecnología en la enseñanza de la matemática como herramienta para el estudio de los saberes matemáticos y también como herramienta de comunicación entre alumnos, docentes, formadores de docentes, investigadores.

PRIMERA PARTE

Los alumnos, los docentes, el conocimiento matemático y las TIC



— 1 —

La función como modelizadora de la variación

Producciones de alumnos y recursos docentes

Leonardo José Lupinacci¹



1. Presentación

Las tecnologías de la información y la comunicación presentes en la sociedad desde las últimas décadas han ido introduciéndose paulatinamente en los ámbitos escolares. Esta inserción se ha visto reforzada en nuestro país a partir de políticas educativas que proveyeron de computadoras portátiles a alumnos y docentes. Esto genera la necesidad de reflexionar acerca de la inserción de dichas tecnologías en la enseñanza de la matemática. En particular, en este trabajo, proponemos centrarnos en el análisis de las *producciones de alumnos*, fruto de la utilización de las herramientas informáticas para resolver situaciones matemáticas; entendemos por producciones a todas las elaboraciones realizadas en el transcurso de una actividad, tanto los registros escritos como también las interacciones de los alumnos con el medio (la herramienta informática en este caso), con sus pares y con el docente.

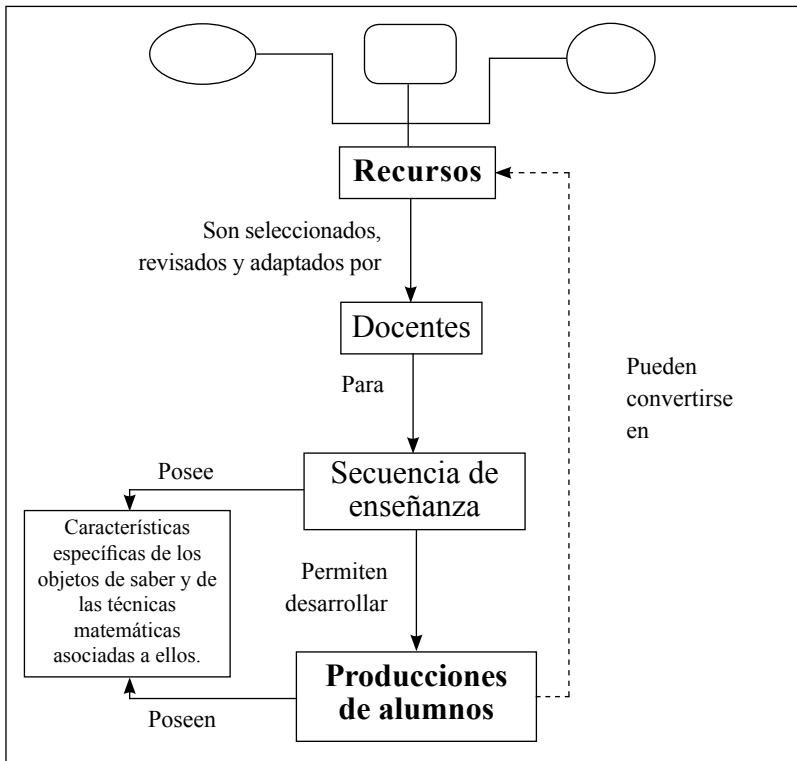
A partir del análisis de los trabajos de los alumnos, pretendemos reflexionar acerca de cómo estos pueden constituirse en *recursos* para los docentes. En este sentido y en concordancia con Rabardel (2005), consideramos los *recursos* como aquellos artefactos producidos por la actividad humana, que han sido elaborados para ser parte de una actividad intencional. De esta manera, diversos recursos tanto materiales como no materiales, están a disposición de un profesor para que los seleccione, revise, adapte y reorganice en función de la concepción y puesta en obra de una secuencia de enseñanza, en lo que Gueudet y Trouche (2010) denominan trabajo documental.

Sobre esta base, proponemos analizar cómo las tareas de los alumnos se constituyen también en recursos que pueden intervenir en la toma de decisiones de los docentes en sus futuras prácticas (Gueudet y Trouche, 2012). Para ello, nos enfocamos en los modos en que opera la intervención

1 Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE), Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) Argentina. Correo: leolupinacci@yahoo.com.ar.

del docente, en su conocimiento profesional; conocimiento que desarrollan a lo largo de esta otra forma de gestión de la clase de matemática.

Así presentamos diferentes producciones de alumnos de cuarto y quinto año de la Escuela Secundaria orientadas a resolver, mediante el uso de entornos informáticos, una secuencia didáctica sobre el concepto de función, como herramienta de modelización de la variación. Junto con estos materiales, presentamos algunas cuestiones y categorías de utilidad para su análisis en relación con las modificaciones que operan en las técnicas matemáticas de resolución cuando el conocimiento se encuentra mediado por la tecnología informática y los distintos modos de trabajo por parte de los alumnos (cuadro 1).



Cuadro 1. Circuito de análisis de producciones de los alumnos

Creemos que los conceptos matemáticos no pueden ser caracterizados únicamente por su definición, ya que no son independientes de las prácticas (constituidas a partir de las herramientas, estrategias y marcos de representación) asociadas a ellos (Sadovsky, 2005). Así podemos argüir que los entornos

informáticos influyen en la forma de relacionarse con la matemática, tanto a partir de los problemas que se pueden plantear como de las estrategias que se despliegan para su resolución. La transposición informática (Balacheff, 1994) se refiere al proceso por el cual el conocimiento matemático se transforma, lenguaje informático específico mediante, para lograr una representación acorde, que inevitablemente influye en los objetos de enseñanza (Bifano y Vilella, 2012) y en las formas de relacionarse entre sí (Bifano, Ferragina y Lupinacci, 2012). En la medida en que este proceso impone ciertas restricciones que hacen que los objetos modelizados no se correspondan necesariamente de forma completa con las teorías matemáticas de referencia (Acosta, 2004), surge la necesidad de analizar las modificaciones que los distintos entornos informáticos operan en los tipos de tareas matemáticas y en las técnicas que posibilitan dichas resoluciones.

En el caso particular de la secuencia analizada que presentamos en este trabajo, los alumnos interactuaron con el *software* GeoGebra. Este programa y otros como Cabrí Géométrie, Regla y Compás o CaRMetal reciben el nombre de Sistemas de Geometría Dinámica porque permiten realizar construcciones geométricas por medio de la manipulación directa de objetos en la pantalla, a la vez que sirven para manipular objetos ya construidos, redistribuyéndolos en tiempo real (Acosta, 2010). En el caso particular de GeoGebra, se incluyen además herramientas de cálculo algebraico (Computer Algebra System o CAS) en conexión directa con el trabajo geométrico, lo que genera una conexión dinámica para múltiples representaciones (Hohenwarter y Jones, 2007), elemento que *a priori* podría destacarse como una potencialidad para el trabajo con funciones.

2. Algunas consideraciones previas

La secuencia que titulamos *La función como modelizadora de la variación* fue diseñada e implementada por docentes de la Escuela Secundaria Técnica que adaptaron una situación preexistente² a los propósitos didácticos y a la organización de contenidos que desarrollaban en sus clases. Se generaron dos recursos de enseñanza diferentes: uno destinado a cuarto año y el otro a quinto; la diferencia entre ambos es la solicitud de la búsqueda de una expresión algebraica que modelice la situación, solo presente en el recurso de quinto año.³

2 La situación fue adaptada a partir de un problema tomado de Ferragina (ed.) (2012).

3 Esta búsqueda de la expresión algebraica se corresponde con los ítems "k" a "p", solo presentes en el recurso de quinto año.

En el caso de cuarto año, se trabajó con alumnos de la orientación técnica *Informática Personal y Profesional* y de la orientación *Multimedios*,⁴ mientras que en quinto año todos los alumnos pertenecían a la orientación *Informática Personal y Profesional*. De todas maneras, el diseño curricular de matemática para cada uno de los años establece un mismo programa para ambas especialidades técnicas.

Hemos desglosado la presentación y el análisis de las producciones en cuatro etapas del trabajo de los alumnos, a saber:

1. La construcción de la figura geométrica de la actividad 1 y las primeras manipulaciones de esta para la búsqueda de valores numéricos determinados (ítems “a” a “d” de la actividad 1).
2. El análisis funcional de las variaciones, posibilitado en este caso por la creación de un punto dinámico y por la integración de diversos registros (ítems “e” a “j” de la actividad 1).
3. La búsqueda de una expresión algebraica que valide las resoluciones propuestas (ítems “k” a “p” de la actividad 1 solamente para el recurso de quinto año).
4. La resolución de la actividad 2.

Las actividades 1 y 2 a las que hacemos alusión son las que se muestran en la situación planteada (figura 1).

Actividad 1

La figura muestra, un cuarto de círculo con radio AB de 6 cm y un punto M que se desplaza sobre AB . Sobre el segmento AM , se construye un rectángulo $AMDE$.

- a) Realicen la construcción que se indica en la figura.

Para realizar la construcción, puede ser de utilidad comenzar con un segmento de longitud fija 6, construir un punto sobre él (M), y posteriormente construir el sector circular y el rectángulo.

- b) ¿Qué ocurre cuando desplazamos al punto M ? Indiquen qué elementos de la construcción cambian y cuáles permanecen constantes. ¿Qué ocurre con el área del rectángulo?

4 La orientación Informática Personal y Profesional abarca distintos ejes de trabajo con herramientas informáticas, tales como el armado, la configuración y reparación de *hardware* monousuario y multiusuario; también la utilización de diversas aplicaciones de *software*. La orientación Multimedios centra el trabajo en distintos aspectos relacionados con los medios audiovisuales; uno de sus ejes es la captura y la edición de audio y video, tarea que se realiza con diversas herramientas informáticas.

Mediante la herramienta **Área** es posible que el valor de la misma aparezca en pantalla.
También pueden hacer visible la longitud del segmento AM. Investiguen cómo.

Les proponemos estudiar las variaciones del área del rectángulo dependiendo de la posición del punto M.

- c) ¿Cuánto vale el área cuando la base del rectángulo mide 3 cm? ¿Y cuándo mide 5 cm?
- d) ¿Cuánto debe medir la base del rectángulo para que el área del rectángulo sea de 15,5?
- e) Si queremos crear un punto P cuyas coordenadas representen estas variaciones. ¿Cuáles deberían ser las coordenadas de dicho punto? Expliquen por qué deben seleccionar esas, y luego ingresen el punto P a través de la **Barra de Entrada**.

Activen, desde el menú **Vista**, la opción **Hoja de Cálculo**. Luego activen, desde el menú contextual del punto P, la opción **Registro en Hoja de Cálculo**. Arrastren el punto M paulatinamente desde A hacia B.

- f) Analicen la información que se observa en la **Hoja de Cálculo**. ¿Se repiten valores? ¿Aparecen una sola vez? ¿Qué es lo que representan? ¿Qué otro dato se puede extraer?
- g) Ahora, desde el menú contextual del punto P, seleccionen la opción **Activa Rastro**. Vuelvan a desplazar el punto M a lo largo del segmento AB. ¿Qué ocurre? ¿Por qué?
- h) ¿Qué relación hay entre lo que se obtiene con la opción **Activa Rastro** y la información de la planilla? Explíciten las características comunes y no comunes entre ambas opciones.
- i) ¿Cuál es el valor máximo al que llega el área del rectángulo? ¿Por qué?
- j) ¿Cuánto mide la base del rectángulo cuando el área es máxima?
- k) Trataremos ahora de encontrar la fórmula que corresponde al rastro dejado por el punto P. Antes de comenzar con esa búsqueda, ¿qué tipo de función te parece observar según el rastro? ¿Por qué?

Propone algunas fórmulas posibles ingresándolas desde la **Barra de Entrada**. Indica si tus conjeturas fueron correctas.

- l) Analizá nuevamente cuales son las coordenadas del punto P, intenta escribir el área del rectángulo que dependa solo de la medida del segmento AM.
- m) Ingresá la fórmula lograda en la **Barra de Entrada**. (Tené en cuenta que la variable independiente debe ser una sola letra en minúscula).
- o) Indica el dominio de la función encontrada, que sea acorde con el problema. Utiliza el comando **Función []**. ¿Qué indica la **Vista Algebraica**? ¿Qué condiciones matemáticas están cambiando cuando escribe esto el *software*? ¿Por qué?
- p) Utiliza el comando **EXTREMO[]**, ¿qué indica el mismo? ¿Cuál es su significado para el problema?

Actividad 2

Ahora, podríamos estudiar otras variaciones. Por ejemplo, la relación entre la base y el área de un triángulo rectángulo construido también sobre un cuarto de círculo de radio 6, como se muestra en la figura. Analicen, entonces, esta nueva propuesta utilizando la secuencia de ítems del problema anterior.

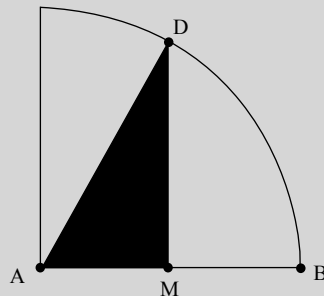
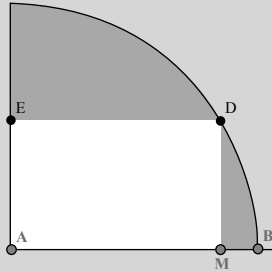


Figura 1

Figura 1. Actividades

La figura muestra, un cuarto de círculo con radio AB de 6 cm y un punto M que se desplaza sobre AB. Sobre el segmento AM, se construye un rectángulo AMDE.

**Figura 2**

- a) Realicen la construcción que se indica en la figura.

Para realizar la construcción, puede ser de utilidad comenzar con un segmento de longitud fija 6, construir un punto sobre él (M), y posteriormente construir el sector circular y el rectángulo.

3. Interpretación de las producciones de los alumnos

Haremos esta lectura de las producciones usando como soporte teórico los aportes de:

- Laborde (1998), Acosta Gempeller (2004, 2008) y Soury-Lavergne (2011) en cuanto a los tipos de tareas y técnicas que atraviesan a los sistemas de geometría dinámica.
- Artigue (1991) en relación con la influencia de la sintaxis específica de los entornos informáticos, en la realización de actividades matemáticas.
- Trouche (1999; 2003) para abordar los modos de trabajo de los alumnos.

Desarrollaremos estos aportes a medida que los empleemos para la interpretación de las producciones, respetando la secuencia de la actividad, que se presenta en el cuadro 2.

3.1. La construcción y la manipulación de la figura geométrica

Se les solicita a los alumnos la construcción de una figura dinámica en el entorno GeoGebra que reproduzca la imagen que ellos poseen en el papel (figura 2). Esta actitud se asume como una decisión didáctica del docente, que privilegia los análisis realizados en la clase en relación con los procedimientos matemáticos empleados, favoreciendo también la aparición de

variedad de producciones, tanto en lo relativo a cuestiones matemáticas como a cuestiones propias del *software*. En este último caso, el *software* le adjudica automáticamente un nombre a cada uno de los elementos construidos (por ejemplo a los lados del rectángulo), esto genera que distintos alumnos puedan tener construcciones similares, pero que los nombres de los elementos correspondientes sean diferentes, por lo que se produce una necesidad posterior de analizar esos nombres.⁵

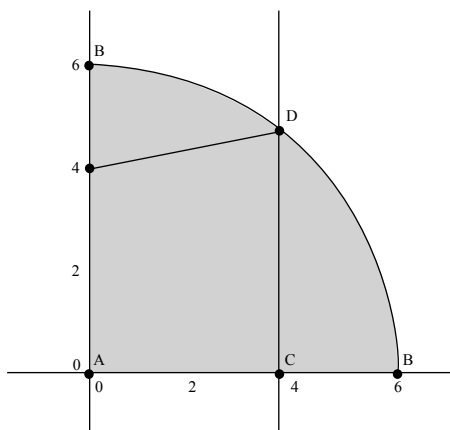


Figura 3

Si bien la consigna menciona el cuarto de círculo, los alumnos dispusieron de diferentes herramientas brindadas por el *software* para su construcción: “Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos”, “Circunferencia dados su centro y radio”, “Arco de circunferencia con centro entre dos puntos” y “Sector circular con centro entre dos puntos”. En función de las distintas herramientas utilizadas, resultó más o menos sencillo construir el punto M (que se desplaza sobre AB) y los vértices del rectángulo, cuestión que en la elaboración de la secuencia llevó a los docentes a incluir la sugerencia sobre los pasos de la construcción (figura 2).

Lo anterior, en términos de desarrollo profesional docente, lleva implícita la reflexión acerca de la orquestación,⁶ principalmente a partir de la posibilidad de restringir el uso de las herramientas que ofrece el *software* GeoGebra.

5 Esta cuestión toma relevancia en la construcción del punto dinámico, como veremos en el apartado siguiente.

6 La orquestación es la disposición sistemática de un conjunto de artefactos para la puesta en obra de una situación matemática (Trouche, 2004). En este caso, dado el entorno GeoGebra y la situación diseñada, la orquestación se relaciona con la consideración del espacio y el tiempo, de la gestión de los artefactos disponibles y, en relación con la situación, las fases de su resolución, los objetos matemáticos puestos en juego y las variables didácticas.

Si se restringe el uso de la herramienta “sector circular dado centro entre dos puntos”, se privilegia el uso de otras herramientas. La no restricción abrió el abanico para que los alumnos utilizaran una mayor cantidad de herramientas para explorar y pudieran analizar posteriormente la conveniencia o no del uso de cada una de ellas.

En relación con la construcción del rectángulo, se presentan algunas producciones confeccionadas por aproximación, que no ponen en juego las propiedades de las figuras geométricas construidas (figura 3) y se constituyen en la reproducción de un dibujo, no en la realización de una construcción dinámica con sus primitivas geométricas (Laborde, 1998). Esto genera que, al desplazar el punto que determina la longitud de la base del rectángulo (C en la figura), la imagen que devuelve la pantalla no se corresponda con el rectángulo solicitado, y eso produce una retroacción que promueve la búsqueda de nuevas estrategias de construcción.

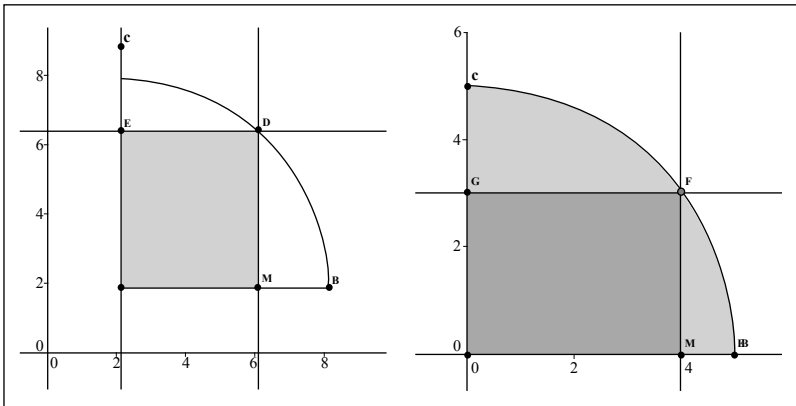


Figura 4

En algunos de estos casos, se observa que los alumnos borran parte de la construcción intentando determinar el rectángulo de forma diferente: algunos logran trazarlo mediante la utilización de rectas paralelas y perpendiculares, mientras que otros continúan basándose en cuestiones de dibujo puro sin establecer relaciones geométricas, lo que genera que la figura se deforme por medio del arrastre. Esta manipulación posibilita que las construcciones cambien de forma respetando las propiedades geométricas que se han utilizado para su confección y las que se deriven de ellas, mientras que, si el dibujo fue realizado mediante primitivas de dibujo puro o “a ojo”, la construcción perderá sus propiedades al manipular sus elementos.

Acosta (2008) identifica la acción de arrastrar como uno de los grandes tipos de tareas propias de estos entornos dinámicos, puesto que no existe una

correlación directa con ninguna técnica específica en el entorno del lápiz y papel. A su vez, este arrastre puede tener diversas funciones en una situación de enseñanza (Soury-Lavergne, 2011):

- Posibilita corroborar la conservación de una propiedad matemática al arrastrar los puntos de una figura.
- Permite conjeturar propiedades a partir de ajustar la figura simultáneamente en función de las hipótesis y de la conclusión.
- Posibilita validar o invalidar una construcción.

Decimos entonces que la primera de estas posibilidades se relaciona con una acción ostensiva, con la que se pretende mostrar la conservación de una propiedad. La segunda y la tercera posibilidad pueden relacionarse con lo que Acosta (2004) denomina *arrastre de exploración* y *arrastre de verificación*, respectivamente:

- a) El arrastre de exploración es aquel que se realiza antes de elaborar una conjetura desplazando de manera aleatoria los diferentes elementos de un dibujo para identificar un fenómeno visual que pueda interpretarse como una propiedad geométrica.
- b) El arrastre de verificación se realiza una vez elaborada una conjetura y permite analizar si el fenómeno visual que se tiene en mente corresponde al comportamiento de la figura una vez desplazada. Es precisamente esta última función del arrastre, la empleada para verificar que el cuadrilátero construido sigue siendo un rectángulo al desplazar sus elementos, condición que, al no cumplirse, invita a conjeturar nuevas condiciones para realizar la construcción.

Estas cuestiones, analizadas en espacios de puestas en común, hicieron que algunos alumnos reconociesen la necesidad de establecer ángulos rectos (algunos hablan de perpendicularidad), a la par que verbalizan las dificultades que el desconocimiento acabado de la herramienta informática les propuso para lograr dicha tarea.⁷ Este es el diálogo que permite una intervención docente de alto valor: proponer el análisis de los procedimientos matemáticos utilizados por medio del *software* y analizar cuestiones relativas a la diferencia entre dibujo y figura. En este caso, se encuentra la determinación de uno de los vértices del rectángulo (el vértice E en la imagen del recurso original).

Si se utilizó la herramienta “sector circular”, al definir ese punto como la intersección de dicho sector circular con la recta paralela a la base que

7 Se aclara en este punto que si bien los alumnos tenían experiencia con el manejo de distintas herramientas informáticas utilizadas a lo largo de su formación técnica, la presentación de esta secuencia constituyó uno de sus primeros acercamientos al trabajo con sistemas de Geometría Dinámica.

pasa por D, se determina un punto sobre el arco de circunferencia del sector y no el punto buscado, por lo que se sugiere en los casos en que se presenta dicha dificultad determinar primero la recta perpendicular a AB que pasa por A, y luego determinar el vértice del rectángulo. En los casos donde los alumnos utilizaron por ejemplo las herramientas “circunferencia dado centro y radio” o “arco de circunferencia con centro entre dos puntos”, lo descrito carece de relevancia. Es aquí donde se analiza lo adecuado o no del uso de las distintas herramientas mencionadas con anterioridad para la construcción del cuarto de círculo, contrastando las diversas producciones.

Hay que tomar en cuenta en este análisis la ubicación de la construcción sobre los ejes coordenados o fuera de ellos (figura 4). La conveniencia o no de estas cuestiones se analizó posteriormente en relación con las técnicas que cada una de las configuraciones permitió al momento de resolver las consignas siguientes.

Una de las cuestiones que variaron de acuerdo con la ubicación de la figura fueron las técnicas utilizadas para buscar las imágenes y preimágenes (área del polígono y longitud de la base) solicitadas en los puntos c y d:

- c) ¿Cuánto vale el área cuando la base del rectángulo mide 3 cm? ¿Y cuándo mide 5 cm?
 d) ¿Cuánto debe medir la base del rectángulo para que el área del rectángulo sea de 15,5?

Mientras que en los casos en los que la figura fue construida sobre los ejes de simetría los alumnos utilizaron las marcas sobre el eje para indicar la medida de la base, quienes realizaron la construcción fuera de los ejes, recurrieron a la ventana algebraica para buscar el valor numérico de la base del rectángulo o utilizaron el comando “distancia o longitud” para indicar la misma en pantalla. Algunos alumnos, que originalmente habían realizado la figura fuera de los ejes, desplazan la construcción completa hasta ubicar el cuarto de círculo coincidente con el primer cuadrante, lo que favorece la lectura de la longitud de la base a partir de las marcas de la escala de los ejes.

Otro elemento de análisis es la utilización del *zoom* (figura 5), que permite una mayor aproximación en los valores numéricos. Esta es otra técnica que no tiene correlación en el entorno papel.

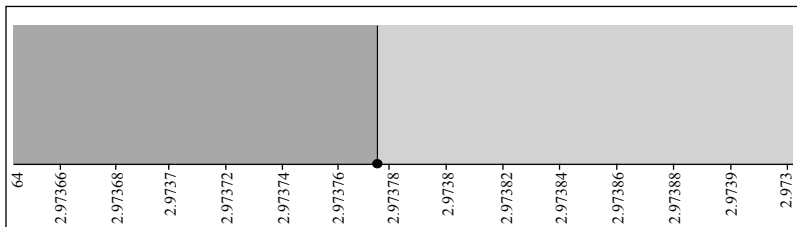


Figura 5

Del análisis de las respuestas de los alumnos con relación a los puntos c y d, surge que, si bien no se presentaron inconvenientes para dar una respuesta satisfactoria del área del rectángulo a partir de la medida de su base (con distintos grados de aproximación), las respuestas de los alumnos de cuarto año presentaron una particularidad en el ítem d: ante el pedido de la medida de la base del rectángulo dada su área (15,5), muchos alumnos presentaron un único valor como respuesta posible, sin anticipar la existencia de otro valor que cumplía la condición pedida. De esta manera, se encontraron respuestas diversas:

- Si el área del rectángulo mide 15,5, la base mide 5,28.
- La base del rectángulo es de 5,2 para que el área sea de 15,5.
- La base del rectángulo debe medir 2,97 cm para que el área sea de 15,5 cm².

Podemos afirmar que la manipulación de la construcción geométrica (hasta este momento los alumnos no disponían de una tabla de valores o de la representación gráfica de la función) no anticipa la existencia de dos soluciones diferentes, quizás por no conjeturar el crecimiento y el posterior decrecimiento del área del rectángulo. De ahí la necesidad de hacerlo explícito en el espacio del debate, conjuntamente con el análisis de las variaciones observadas en la construcción geométrica.⁸

3.2. *La construcción del punto dinámico y el análisis funcional de las variaciones*

En el ítem e de la actividad 1, se propone la construcción de un punto dinámico que represente las variaciones estudiadas.

- e) Si queremos crear un punto P cuyas coordenadas representen estas variaciones. ¿Cuáles deberían ser las coordenadas de dicho punto? Expliquen por qué deben seleccionar esas, y luego ingresen el punto P a través de la Barra de Entrada.

En el entorno GeoGebra, un punto dinámico es aquel cuyas coordenadas se corresponden con valores variables (en este caso, la longitud de la base y el área del rectángulo). Cuando se modifican sus valores, el punto en cuestión varía su posición. Es la trayectoria del punto dinámico la que permite obtener la representación gráfica de la función. Al identificar las variables

8 Esta cuestión de la presentación de una única solución no se evidencia en 5° año, donde la mayoría de los grupos de alumnos obtiene ambos valores. Podría conjeturarse que esta diferencia se debe al mayor trabajo funcional que los alumnos han realizado, tanto estableciendo imágenes mentales de funciones características que les permitieron anticipar la representación del crecimiento y decrecimiento como por haber trabajado en diversas ocasiones con el cálculo de preimágenes de funciones donde la solución no es única.

puestas en juego, los alumnos requirieron de la intervención del docente para sugerirles cuestiones que los ayudasen a reconocerlas.

Una vez identificadas las variables, se presentaron dificultades en la construcción del punto. Pareciera existir una resistencia a identificar que las coordenadas de un punto puedan ingresarse con valores que no sean numéricos. Esto resulta más evidente en cuarto año, donde incluso surgen preguntas acerca de “la fórmula” que se debe ingresar en el programa, indicando que tal relación debería definirse por medio de una expresión algebraica y no por un punto. Este punto de la secuencia nos permite analizar la complejidad de la construcción:

- a. La construcción de un punto dinámico supone un tipo de tarea con la que los alumnos no están familiarizados tanto por no haberse enfrentado a problemas similares en entornos dinámicos como por ser un tipo de tarea para la cual no encuentran técnicas construidas previamente en el entorno del lápiz y papel.
- b. La construcción del punto dinámico se apoya en la noción de función que dominan los alumnos, y esta puede depender de las prácticas asociadas a este concepto que los alumnos hayan tenido así como de su basamento epistemológico. A partir de un análisis histórico del concepto de función, se pueden distinguir diferentes concepciones de esta noción e interpretarla como una variación, una expresión algebraica o simbólica, una representación gráfica, una correspondencia entre conjuntos o una herramienta de modelización. Al no ser estas categorías excluyentes, pueden estar presentes dos o más concepciones simultáneamente en una práctica matemática en particular.

En este ítem, se tensionan las concepciones estáticas del concepto de función que tienen los alumnos con la noción de variación; concepto que supone un mayor dinamismo y que pareciera no haberse construido más allá de estar presente en la matemática desde los orígenes del concepto de función: En el siglo XVII, Newton utilizaba el término *fuente* para representar una relación entre variables. Esas cantidades variables o *fluentes* eran cantidades que aumentaban gradual e indefinidamente (Collette, 1985) y generaban el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Es quizás esta concepción de función como relación entre *fluentes* la que surge al encontrar la representación gráfica de una variación por medio de la construcción y el posterior desplazamiento de un punto dinámico.

Algunas respuestas de los alumnos al ítem e fueron:

- I) El área del rectángulo varía dependiendo de M, modifica su tamaño. Las coordenadas de dicho punto deberían ser (x; y) variable independiente y dependiente, que en el problema se representan como base y área. La base es la variable independiente porque no necesita de nadie para poder

moverse, en cambio, el área es la variable dependiente que depende de la base para cambiar sus medidas.

- II) Las coordenadas deben ser la base del rectángulo y su área porque el área depende de la base del rectángulo.
- III) Las coordenadas de dicho punto son P igual (a_1 , polígono1). Porque utilizamos el área y los lados del polígono para poder hacer nuestro punto.
- IV) AM (base) Polígono1 (área). Seleccionamos esos porque AM representa la base y polígono1 representa el área del rectángulo.

En las dos primeras respuestas, encontramos referencias específicas a la identificación de las variables, haciendo hincapié en este punto a la relación de dependencia de una sobre la otra. En las respuestas III y IV, aparecen ejemplos que hacen referencia a los nombres que el *software* le otorgó a los elementos construidos y que son tomados para la construcción del punto dinámico.

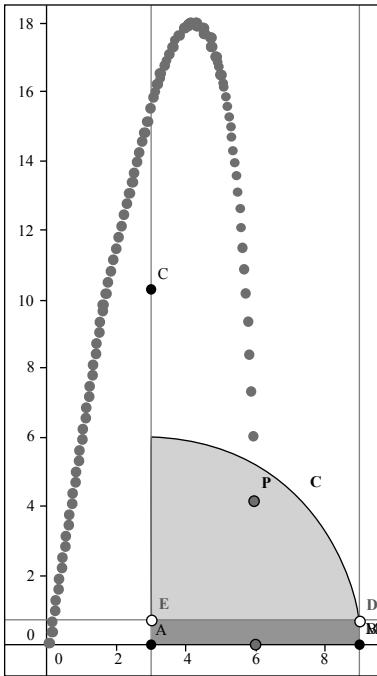
Debemos tomar en cuenta que hay una distinción en la forma de interpretar y posteriormente ingresar los valores variables. En relación con el segmento que representa la base del rectángulo, se evidencia la distinción entre a_1 (nombre que el *software* le asignó y AM (que al ser ingresado en el *software*, se reconoce como la distancia entre dichos puntos). A efectos prácticos, las dos simbolizaciones son equivalentes en el problema, pero esta equivalencia no fue analizada conjuntamente en el desarrollo de la clase. La respuesta que hace referencia a las coordenadas del punto como (a_1 , polígono1) fue una expresión que circuló por distintos grupos de alumnos a partir de interacciones y consultas. Esto provocó que algunos grupos utilizaran indistintamente estos “nombres” de los objetos más allá de que, en su propia construcción, los nombres establecidos por el *software* para estos elementos no fueran los mismos.

La continuidad del trabajo permitió analizar los desplazamientos del punto dinámico por medio del registro de sus coordenadas en la planilla de cálculo y a través del rastro dejado en la pantalla por dicho punto, acciones que posibilitaron centrar el análisis en las variables utilizadas para la construcción del punto:

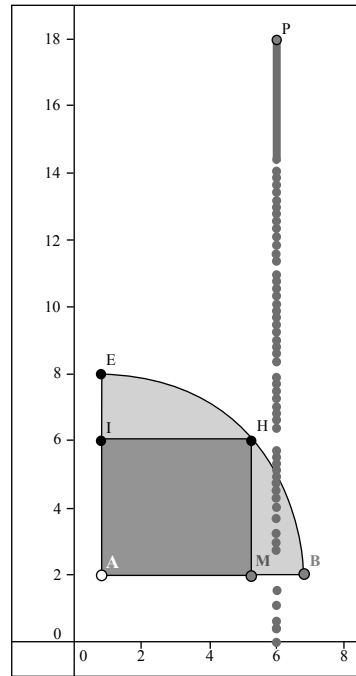
Activen, desde el menú Vista, la opción Hoja de Cálculo. Luego activen, desde el menú contextual del punto P, la opción Registro en Hoja de Cálculo. Arrastren el punto M paulatinamente desde A hacia B.

- f) Analicen la información que se observa en la Hoja de Cálculo. ¿Se repiten valores? ¿Aparecen una sola vez? ¿Qué es lo que representan? ¿Qué otro dato se puede extraer?
- g) Ahora, desde el menú contextual del punto P, seleccionen la opción Activa Rastro. Vuelvan a desplazar el punto M a lo largo del segmento AB. ¿Qué ocurre? ¿Por qué?
- h) ¿Qué relación hay entre lo que se obtiene con la opción Activa Rastro y la información de la planilla? Expliciten las características comunes y no comunes entre ambas opciones.

En relación con el uso del rastro dejado por el punto dinámico, podemos ver en la figura 6 una construcción del punto a partir de los elementos adecuados, mientras que la figura 7 se corresponde con la producción de un grupo de alumnos que replicó la simbología utilizada por el grupo anterior, y los elementos implicados no fueron llamados igual por el *software* (específicamente, en la construcción el valor a_1 hacía referencia a la distancia AB, que en todas las construcciones y de acuerdo con el enunciado, tenía el valor fijo 6).



Figuras 6



Figuras 7

Otras construcciones del punto dinámico provocaron que la pantalla del *software* devolviera imágenes inesperadas. En el caso de la figura 8, la construcción del punto estuvo dada por las variables pertinentes, pero su separación en la simbología utilizada fue realizada por medio del punto y coma, símbolo generalmente utilizado por los alumnos en el trabajo con lápiz y papel para representar por ejemplo un punto $(x; y)$. Pero en este caso, tal simbolización es reconocida por el entorno informático como el ingreso de un punto dadas sus coordenadas polares y no sus coordenadas cartesianas.

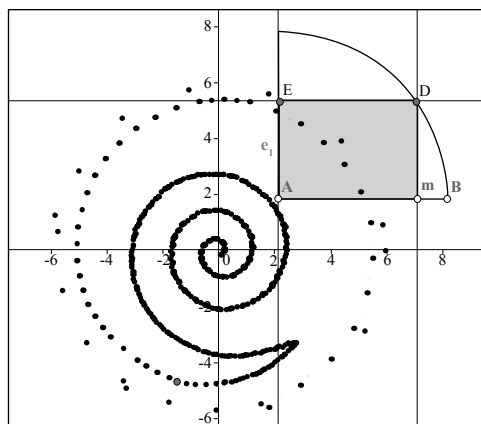


Figura 8

El arrastre de los objetos implicados (en este caso, el arrastre del punto M sobre el segmento AB) es un arrastre de verificación. Los alumnos lo utilizan para contrastar lo esperado y lo efectivamente realizado, supone una forma de validar o invalidar la construcción. Aunque en general, ante la obtención de resultados inesperados, los alumnos no utilizaron el arrastre como una nueva manera de exploración para detectar posibles errores, sino que en muchas ocasiones borraron lo realizado y lo intentaron nuevamente.

En relación con el comportamiento no esperado del punto dinámico, surge el análisis de la sintaxis específica del entorno informático, cuestión que toma relevancia partir de las distintas producciones efectuadas. Si bien el entorno GeoGebra permite las construcciones geométricas sin la mediación de un lenguaje específico de programación, las herramientas de cálculo algebraico que ofrece requieren del conocimiento de ciertos comandos y de la sintaxis de estos, estructuras que en algunos casos difieren de las utilizadas cotidianamente en el entorno analógico. Los entornos informáticos no son transparentes, se requiere cierta familiarización tanto con los aspectos específicamente matemáticos como con los aspectos no matemáticos (Artigue, 1991).

La sintaxis necesaria en GeoGebra para construir un punto P a partir del ingreso de sus coordenadas en la *barra de entrada* fue una cuestión que produjo cierta incertidumbre en relación con las producciones realizadas.

Por ejemplo:

- I) Si se ingresa $P = (3,4)$ se obtendrá en pantalla el punto P de coordenadas cartesianas (3,4).
- II) Si se ingresa $P = (3;4)$ (utilizando punto y coma para separar las coordenadas), el *software* interpretará la introducción de un punto mediante

coordenadas polares, donde 3 será la distancia del punto P al centro de coordenadas y 4 será considerado como el ángulo correspondiente. Incluso en ese caso, al no ingresar el símbolo de grados sexagesimales ($^{\circ}$), dicho ángulo será interpretado en radianes.

III) Si se ingresa $p = (3,4)$ (con p expresado en letra minúscula) se obtendrá en pantalla el vector de coordenadas cartesianas (3,4) con centro en el origen de coordenadas. (Análogamente, si se utiliza punto y coma, tendremos el vector cuyas coordenadas son interpretadas como polares).

De esta manera, se hace evidente cómo, con solo las distintas combinaciones de mayúsculas y minúsculas, y de coma y punto y coma, se da lugar a cuatro construcciones diferentes. Artigue (1991) establece que, si bien las cuestiones de adaptación a la sintaxis matemática pueden ser concebidas como motor del aprendizaje, la sintaxis propia de los entornos informáticos que se ubican en un nivel no matemático no se reducen solo a la memorización y generan la aparición de muchos errores recurrentes. Errores que no se limitan únicamente a los momentos de iniciación del manejo de un *software* determinado, sino que reaparecen posteriormente, incluso cuando ya se dispone de un manejo adecuado del entorno, quizás debido a que el foco de la atención está puesto en la resolución de actividades complejas y no en la estructura de los comandos ingresados. Esto último puede ilustrarse con la realización de la actividad 2, donde dichas dificultades volvieron a aparecer incluso después de ser analizadas conjuntamente con los alumnos a lo largo de la primera actividad, apareciendo incluso dificultades en grupos de alumnos que no las habían tenido en los desarrollos anteriores.

Con relación al análisis de las variaciones funcionales, los alumnos no tuvieron inconvenientes para identificar los valores solicitados en los ítems i y j:

- i) ¿Cuál es el valor máximo al que llega el área del rectángulo? ¿Por qué?
- j) ¿Cuánto mide la base del rectángulo cuando el área es máxima?

Cabe destacar que, para esta actividad, se observó una mayor ponderación por parte de los alumnos al registro gráfico en desmedro del numérico (disponible en este caso a partir del uso de la *Hoja de Cálculo*). De esta manera, obtuvieron los valores a partir de la manipulación del gráfico y a partir de la lectura sobre los ejes cartesianos, incluso utilizando el zoom.

Ante el análisis conjunto de estas cuestiones, algunos alumnos argumentaron dichas técnicas en función de la imposibilidad de contar con una fórmula que les permitiera conocer el “valor exacto”, cuestión que evidencia una vez más las diferentes concepciones en relación con el concepto de función.

Vista parcial del contenido del libro.

Para obtener el libro completo en formato electrónico puede adquirirlo en:

www.amazon.com
www.bibliotechnia.com
www.interebook.com
www.e-libro.net

MIÑO y DÁVILA
♦ E D I T O R E S ♦